EX 25 :

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{n+2}x.dx$

1) a) $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2x.dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left((1+tg^2x)-1\right)dx$

$= \left[tg(x)-x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1-\frac{\pi}{4}$

b) $I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{n+3}x.dx$

pour : $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ on a : $0 \le tgx \le 1$

$\Rightarrow 0 \le tg^{n+3}x \le tg^{n+2}x \Rightarrow 0 \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{n+3}x.dx \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{n+2}x.dx$

$\Rightarrow 0 \le I_{n+1} \le I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

c) (I_n) est décroissante et minorée par 0
elle est donc convergente.

3) a) $I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(tg^{n+2}x + tg^{n+4}x\right)dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+tg^2x\right).tg^{n+2}x.dx = \left[\frac{1}{n+3}tg^{n+3}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+3}$

b) $I_{n+2} \ge 0 \Rightarrow I_n + I_{n+2} \ge I_n$

$\Rightarrow \frac{1}{n+3} \ge I_n$ or $I_n \ge 0$

d'où $0 \le I_n \le \frac{1}{n+3}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+3} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

EX 26 :

$f(x) = \frac{1}{x^2}$; $x \in]0,+\infty[$

1) $n \in \mathbb{N}^*$

a) $\int_1^n f(x)dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^n = 1-\frac{1}{n}$

b) $\lim_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} (1-\frac{1}{n}) = 1$

2) $k \in \mathbb{N}^*$

$\int_k^{k+1} f(x)dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_k^{k+1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

3) $\int_k^{k+1} f(x)dx = \frac{1}{k(k+1)}$

$S_n = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$

$S_n = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + ... + \int_n^{n+1} f(x)dx$

$S_n = \int_1^{n+1} f(x)dx = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$

EX 27 :

$f(x) = \frac{1}{x^3}$; $x \in [1,+\infty[$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$; $n \ge 1$

1) a) $f'(x) = \frac{-3}{x^4} < 0 \quad \forall x \in [1,+\infty[$

d'où f est décroissante sur $[1,+\infty[$

$f(x) = \frac{1}{x^3} \ge 0 \qquad \forall x \in [1,+\infty[$

b) $S_{n+1} - S_n = f(n+1) \ge 0$

d'où (S_n) est croissante

2) a) $* \int_1^n f(t)dt = \int_1^n \frac{1}{t^3}.dt = \left[\frac{-1}{2t^2}\right]_1^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}$

$* n \ge 1 \Rightarrow n^2 \ge 1 \Rightarrow -2n^2 \le -2 \Rightarrow \frac{-1}{2n^2} \ge \frac{-1}{2}$

$\Rightarrow \frac{-1}{2} \le \frac{-1}{2n^2} \le 0 \Rightarrow 0 \le \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \le \frac{1}{2}$

doù $0 \le \int_1^n f(t).dt \le \frac{1}{2}$

b) $\lim_{n\to+\infty} \int_1^n f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}) = \frac{1}{2}$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn